Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 120

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof.Luigi Chierchia
Tutori: Vincenzo Morinelli, Emanuele Padulano

Soluzioni tutorato 26 Aprile 2012
Successioni e serie di funzioni

1. (a) $f_n(x) = e^{-nx} \overset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$; la convergenza non è uniforme su tutto $[0, +\infty)$ perché la funzione limite non è continua, ma c'è convergenza uniforme in ogni intervallo del tipo $[\delta, +\infty)$: infatti, essendo le f_n funzioni decrescenti, $\sup\limits_{x\in[\delta,+\infty)} |e^{-nx}| = e^{-n\delta} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (b) $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]} \overset{n\to\infty}{\to} 0\ \forall x \in \mathbb{R}$; la convergenza è uniforme perché $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (c) $f_n(x) = \chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right]} \overset{n\to\infty}{\to} 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, ma la convergenza non è uniforme in quanto $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = 1 \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$; c'è tuttavia convergenza uniforme in $(-\infty, 0] \cup [\delta, +\infty)\ \forall\delta > 0$ perché $\sup\limits_{x\in(-\infty,0]\cup[\delta,+\infty)} |f_n(x)| = 0$ se $n > \frac{1}{\delta}$.

   (d) $f_n(x) = \frac{x}{n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, ma la convergenza non è uniforme perché $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq \left|f_n\left(n^3\right)\right| = n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty$; la convergenza è uniforme in $[-M, M]\ \forall M > 0$, perché, essendo tutte le f_n funzioni crescenti, raggiungeranno il valore massimo agli estremi dell'intervallo considerato e dunque $\sup\limits_{x\in[-M;M]} |f_n(x)| = |f_n(\pm M)| = \frac{M}{n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (e) $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n} \overset{n\to\infty}{\to} 0\ \forall x \in \mathbb{R}$; calcoliamo $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$ studiando la derivata di f_n; $f_n'(x) = \frac{x^2+n-2x^2}{\left(x^2+n\right)^2} = \frac{n-x^2}{\left(x^2+n\right)^2}$; notiamo che $f_n'(x) > 0$ se $|x| < \sqrt{n}$ e $f_n'(x) < 0$ se $|x| > \sqrt{n}$ quindi f_n ha un massimo locale in $x = \sqrt{n}$ e un minimo locale in $x = -\sqrt{n}$; siccome f_n è una funzione dispari e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$ si ha che $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| =$
   $= \left|f_n\left(\pm\sqrt{n}\right)\right| = \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ e quindi la convergenza è uniforme.

   (f) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{n^2x} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{n} & \text{se } x = 0 \end{cases} \overset{n\to\infty}{\to} 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ e la convergenza è uniforme perché $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left|\frac{\sin(nx)}{n^2x}\right| \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{n|x|}{n^2|x|} = \frac{1}{n}$ e dunque $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

(g) $f_n(x) = \arctan\left(n^2 - x\right) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e la convergenza non è uniforme poiché $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\arctan\left(n^2 - x\right) - \frac{\pi}{2}\right| \geq \left|\arctan\left(n^2 - \left(n^2 + n\right)\right) - \right.$ $\left. - \frac{\pi}{2}\right| = \left|\arctan(-n) - \frac{\pi}{2}\right| \overset{n\to\infty}{\to} \left|-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right| = \pi$; c'è però convergenza uniforme in tutti gli intervalli del tipo $(-\infty, M]$, perché essendo le f_n funzioni decrescenti si ha
$\sup_{x\in(-\infty,M]} \left|\arctan\left(n^2 - x\right) - \frac{\pi}{2}\right| = \left|\arctan\left(n^2 - M\right) - \frac{\pi}{2}\right| \overset{n\to\infty}{\to} 0.$

(h) $f_n(x) = \int_{-nx^2}^{nx^2} e^{-t^2} dt \overset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} \sqrt{\pi} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, che è una funzione discontinua e quindi la convergenza non è uniforme su tutto $\mathbb{R}$ ma lo è in ogni $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)$ perché $\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \left|\int_{-nx^2}^{nx^2} e^{-t^2} dt - \right.$ $\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt\right| \leq \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \int_{-\infty}^{-nx^2} e^{-t^2} dt +$ $+ \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \int_{nx^2}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{-n\delta^2} e^{-t^2} dt + \int_{n\delta^2}^{+\infty} e^{-t^2} dt \overset{n\to\infty}{\to} 0.$

(i) $f_n(x) = \sin\left(\pi n x^2\right) e^{-nx^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e la convergenza non è uniforme in tutto $\mathbb{R}$ perché $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin\left(\pi n x^2\right) e^{-nx^2}\right| \geq$ $\geq \left|\sin\left(\pi n \left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2\right) e^{-n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{e}} \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$; la convergenza è uniforme in $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)$ $\forall \delta > 0$ in quanto
$\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \left|\sin\left(\pi n x^2\right) e^{-nx^2}\right| \leq \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \left|e^{-nx^2}\right| =$
$= e^{-n\delta^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$

2. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} x^n$: il raggio di convergenza della serie $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{e^n}{n}\right|}} =$ $= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{e}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{e}$; studiamo ora la convergenza ai bordi dell'intervallo: per $x = \frac{1}{e}$ ottengo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che diverge e per $x = -\frac{1}{e}$ ottengo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge, dunque l'intervallo di convergenza $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^{10}}$: il raggio di convergenza $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n^{10}}\right|}} =$ $= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^{10}}} = 1}$; ai bordi dell'intervallo ottengo per $x = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{10}}$ e per $x = -1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}}$, che convergono entrambe, dunque l'intervallo di convergenza $[-1, 1]$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}x^n$: il raggio di convergenza $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^n}{n!}}{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n!}\frac{(n+1)!}{e^{n+1}}=$
$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{e}=\infty$,dunque la serie converge $\forall x\in\mathbb{R}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\pi^n}x^n$: il raggio di convergenza $\displaystyle\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{\pi^n}}}=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}}=0$,
quindi la serie converge solo in $x=0$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n}{n}\right)^n x^n$: il raggio $\displaystyle\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{\cos n}{n}\right)^n\right|}}=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\frac{|\cos n|}{n}}=\infty$,
dunque la serie converge $\forall x\in\mathbb{R}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^n x^n$: il raggio $\displaystyle\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)^n\right|}}=$
$\displaystyle=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|}=1$, dunque l'intervallo di convergenza $(-1,1)$
perch ai bordi dell'intervallo di convergenza le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^n$
e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^n$ non convergono perch il termine n-esimo non tende a 0.

3. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}$ è una serie geometrica di ragione e^{-x} e dunque converge $\Leftrightarrow |e^{-x}|<1\Leftrightarrow x>0$; la convergenza non è uniforme (e quindi neanche totale) in $(0,+\infty)$ perché la serie non converge ai bordi di questo intervallo in quanto per $x=0$ si ha $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}1=+\infty$; c'è però convergenza totale (e quindi anche uniforme) negli intervalli del tipo $[\delta,+\infty)$ $\forall\delta>0$ perché $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{x\in[\delta,+\infty)}|e^{-nx}|=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\delta}<+\infty$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^x$ è la serie armonica generalizzata e quindi converge in $(-\infty,-1)$; la convergenza non è uniforme (e dunque neanche totale) perché in $x=1$ la serie diverge, ma è totale (e quindi anche uniforme) sugli intervalli $(-\infty,-1-\delta]$ in quanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in(-\infty,-1-\delta]}|n^x|=$
$\displaystyle=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1-\delta}<+\infty$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\sin(nx)}{n^2}$ converge su tutto $\mathbb{R}$ perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x\sin(nx)}{n^2}\right|\leq$
$\displaystyle\leq|x|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$; la convergenza non è uniforme (e neanche totale) su tutto $\mathbb{R}$ perché il termine n-esimo non tende uniformemente

a 0: infatti $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{x\sin(nx)}{n^2}\right| \geq \left|\frac{n^2\sin\left(n^3\right)}{n^2}\right| = \left|\sin\left(n^3\right)\right| \overset{n\to\infty}{\nrightarrow} 0$, ma è totale (e uniforme) negli intervalli limitati perché $\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in[-M,M]}\left|\frac{x\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in[-M,M]}\left|\frac{x}{n^2}\right| = M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty.$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(n^2x\right)e^{-nx^2}}{1+n^2+x^2}$ converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$ perché $\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\cos\left(n^2x\right)e^{-nx^2}}{1+n^2+x^2}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} < +\infty.$

4. (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n dt = \int_0^x dt\sum_{n=0}^{\infty}t^n = \int_0^x\frac{dt}{1-t} = -\log(1-x).$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}nx^{2n+1} = \frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}2nx^{2n-1} = \frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}x^{2n} = \frac{x^2}{2}\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} =$
$= \frac{x^2}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x^2} = \frac{x^2}{2}\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{x^3}{\left(x^2-1\right)^2}.$

5. $\lim_{n\to\infty}f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n} = 0\ \forall x\in\mathbb{R}$, e la convergenza è uniforme, perché $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}\right| \leq \frac{\pi}{2n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$; $f_n'(x) = \frac{1}{n^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2} = \frac{1}{n^2+x^2} \overset{n\to\infty}{\to}$ $\overset{n\to\infty}{\to} 0\ \forall x\in\mathbb{R}$, e anche in questo caso la convergenza è uniforme, perché $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, dunque sono verificate le ipotesi del teorema di derivazione per successione di funzioni (convergenza puntuale delle f_n e convergenza uniforme delle derivate) e quindi si ha $\lim_{n\to\infty}f_n'(x) =$
$= \left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)' = 0\ \forall x\in\mathbb{R}.$

6. (a) $\frac{n\sin x\cos x}{n+x} \overset{n\to\infty}{\to} \sin x\cos x$ e la convergenza è uniforme in quanto $\sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\left|\frac{n\sin x\cos x}{n+x} - \sin x\cos x\right| = \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\left|\sin x\cos x\left(\frac{n}{x+n}-1\right)\right| \leq$
$\leq \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\left|\frac{n}{x+n}-1\right| = \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\left|\frac{x}{x+n}\right| \leq \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\left|\frac{\frac{\pi}{2}}{x+n}\right| \leq \frac{\pi}{2n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$;
si può quindi applicare il teorema di passaggio al limite sotto integrale e dunque $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{n\sin x\cos x}{n+x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin x\cos x}{n+x}dx =$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2x)}{2}dx = \left[-\frac{\cos^2 x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$

(b) $\frac{e^{\frac{x^2}{n}}}{2+x^2}dx \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2+x^2}$ e la convergenza è uniforme su $\left[0,\sqrt{2}\right]$ infatti

$\sup_{x\in\left[0,\sqrt{2}\right]}\left|\frac{e^{\frac{x^2}{n}}}{2+x^2} - \frac{1}{2+x^2}\right| = \sup_{x\in\left[0,\sqrt{2}\right]}\frac{\left|e^{\frac{x^2}{n}}-1\right|}{2+x^2} \leq \sup_{x\in\left[0,\sqrt{2}\right]}\frac{\left|e^{\frac{x^2}{n}}-1\right|}{2} =$

$= \dfrac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$; applicando il teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale si ha che $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{e^{\frac{x^2}{n}}}{2+x^2} dx = \int_0^{\sqrt{2}} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{x^2}{n}}}{2+x^2} dx =$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{2+x^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} [\arctan y]_0^1 = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$$